

Solution E1

L'équa. diff. est définie par :

```
function # = yprime(t, y)
# = -y
endfunction
```

c'est-à-dire $y' = -y \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} + y(t) = 0}$

La solution est de la forme $y(t) = Ae^{-t/\tau}$ avec ici $\tau = 1$. Donc $y(t) = Ae^{-t}$

La constante A est telle que $y(0) = 1 = Ae^{-0} = A \Rightarrow \boxed{y(t) = e^{-t}}$

Le graphe fourni par ode est rigoureusement identiques à celui de la fonction $y(t) = e^{-t}$.

Solutions E2 (chute d'une bille dans le glycérol)

1. On étudie la bille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{A} = -mg\vec{u}_z - 6\pi\eta Rv\vec{u}_z + m_L g\vec{u}_z = m\vec{a} = m\dot{v}\vec{u}_z \Rightarrow -mg - 6\pi\eta Rv + m_L g = m\dot{v}$$

$$\Rightarrow \dot{v} = -\frac{6\pi\eta R}{m}v - g + \frac{m_L}{m}g = -\frac{6\pi\eta R}{m}v + \left(\frac{m_L}{m} - 1\right)g$$

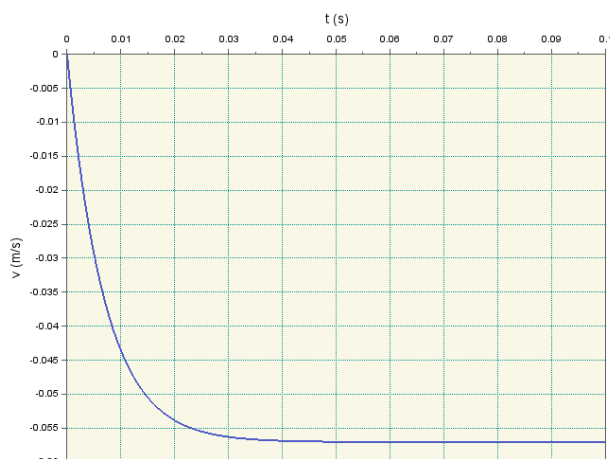
$$m = \rho_1 \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ et } m_L = \rho_2 \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{9\eta}{2\rho_1 R^2}v + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)g}$$

2.

```
// dv/dt=a*v+b avec a=-9*eta/(2*rho1*R^2) et b=(rho2/rho1-1)*g
// paramètres :
rho1 = 7800;
rho2 = 1260;
g = 9.81;
eta = 1;
R = 0.002;
a = -9*eta/(2*rho1*R^2);
b = (rho2/rho1-1)*g;
// valeurs initiales
v0 = 0; //dans un 1er temps
t0 = 0;
// intervalle de temps (1000 valeurs entre 0 et 0,1s)
t= linspace(0,0.1,1000);
// equa diff :
function #=vprime(t, v)
# = a*v + b
endfunction
// vitesse nommée v1
v1=ode(v0,t0,t,vprime)
```

3. Tracer v1 en fonction de t. On ajoute un ";" à la dernière ligne et on ajoute :

```
v1=ode(v0,t0,t,vprime);
plot2d(t,v1)
// plus éventuellement (corriger le chemin)
:
//exec('P:\chemin...\options_graphes.sci', -
1)
```

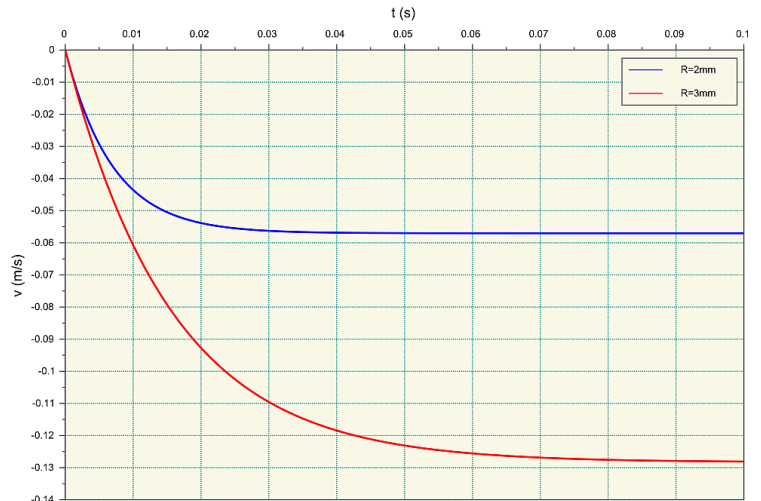


chute d'une bille de 2 mm dans le glycérol

4/5. On modifie le script précédent, ou on ajoute :

```
R2 = 0.003;
a2 = -9*eta/(2*rho1*R2^2);
function #=v2prime(t,v)
    #=a2*v+b
endfunction
// vitesse nommée v2
v2=ode(v0,t0,t,v2prime);
plot2d(t,v2)
```

Ici, j'ai aussi donné des couleurs différentes à chaque courbe, et j'ai ajouté une légende (voir script "définitif" ci-dessous).

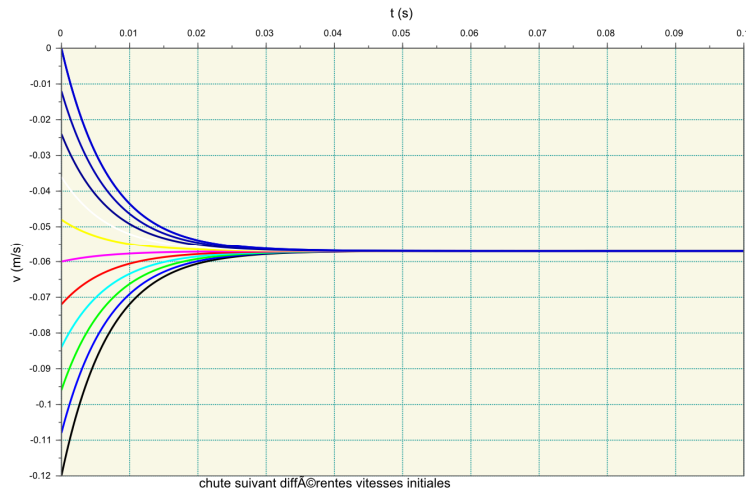


chute d'une bille de rayon R dans le glycérol

```
// Chute d'une bille de rayon R dans le glycérol (2 cas)
// équation diff 1er ordre en v
mode(0) // Affichage des résultats dans la console
clear // Réinitialisation de toutes les variables
xdel(winsid()) // Fermeture de toutes les figures
// paramètres :
rho1 = 7800;
rho2 = 1260;
g = 9.81;
eta = 1;
R = 0.002;
a = -9*eta/(2*rho1*R^2);
b = (rho2/rho1-1)*g;
// valeurs initiales
v0 = 0; //dans un 1er temps
t0 = 0;
// intervalle de temps (1000 valeurs entre 0 et 0,1s)
t= linspace(0,0.1,1000);
// équation diff :
function #=vprime(t,v)
    #=a*v + b
endfunction
// vitesse nommée v1, tracée en bleu
v1=ode(v0,t0,t,vprime);
plot2d(t,v1,style=2)
// 2e équation diff :
R2 = 0.003;
a2 = -9*eta/(2*rho1*R2^2);
function #=v2prime(t,v)
    #=a2*v+b
endfunction
// vitesse nommée v2, tracée en rouge
v2=ode(v0,t0,t,v2prime);
plot2d(t,v2,style=5)
exec('.\options_graphes.sci', -1) //changer chemin si besoin
legends(['R=2mm'; 'R=3mm'], [2 5], opt="ur") //ur=upper & right
```

6. On crée la boucle :

```
for i=0:10
    v0=-0.12+0.012*i; //vecteurs des conditions initiales
    v1=ode(v0,t0,t,vprime);
    plot2d(t,v1,style=i+1) //style au choix, ici fonction de i
end
```

**Solution E3**

$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ avec $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(y')^2$ et $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\bar{P}) + \mathcal{E}_p(\bar{T})$. $\mathcal{E}_p(\bar{P}) = cste$ au cours du mouvement /Oy.

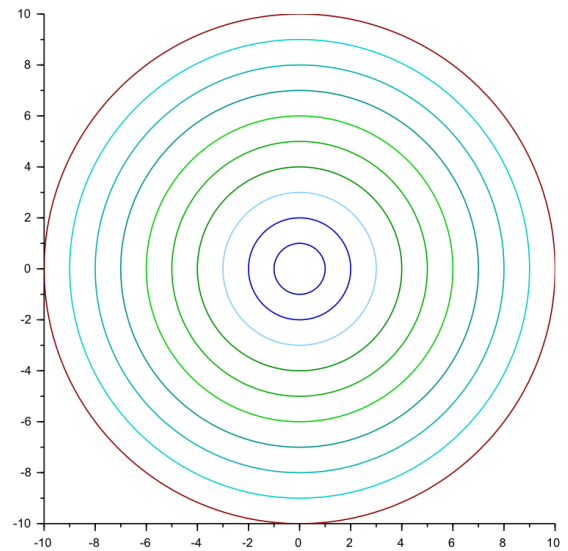
$$\mathcal{E}_p(\bar{T}) = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 + C = \frac{1}{2}ky^2 + C ; \text{ en } y = 0, \mathcal{E}_p = 0 \Rightarrow C = 0$$

Conclusion :
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(y')^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$$

Solution E4

Script complet possible :

```
w = 2;
function #=Yprime(t, Y)
    #(1)=Y(2)
    #(2)=-w^2*Y(1)
endfunction
Y0 = [1;0]
t0 = 0
t = linspace(0,10,1000)
Y = ode(Y0,t0,t,Yprime)
scf(2);
t0=0
t=linspace(0,10,1000)
for y0=0:10
    Y0=[y0;0]
    Y=ode(Y0,t0,t,Yprime)
    plot2d(Y(1,:),Y(2,:)/w,style=y0+9)
end
A=gca(); // accès aux propriétés des axes
A.isoview="on"; // base orthonormée
```

**Solution E5**

La masse ponctuelle située à l'extrémité du fil sans masse de longueur ℓ (pendule simple) est soumise à son poids et à l'action \bar{T} du fil. \bar{T} étant perpendiculaire au mouvement, son travail est nul : on prendra $\mathcal{E}_p(\bar{T}) = 0$.

On a donc $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\bar{P}) = -mgx + cste$, Ox désignant l'axe vertical descendant $\Rightarrow \mathcal{E}_p = -mg\ell \cos\theta + cste$

D'autre part $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$, donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos\theta + cste$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow \ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0, \text{ soit } \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0} \text{ avec } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

Solution E6

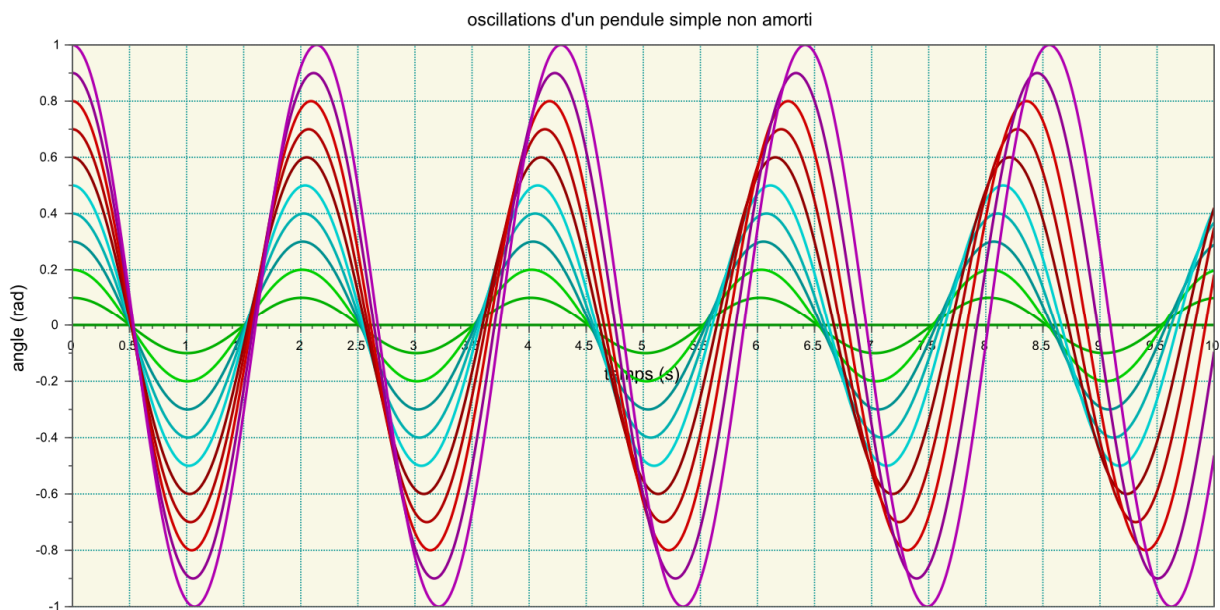
L'équa. diff. sera tout d'abord mise sous la forme $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta$

On introduit alors $\mathbf{Q}(t) \begin{cases} Q_1 = \theta(t) \\ Q_2 = \dot{\theta}(t) \end{cases}$ pour avoir l'équa. diff. sous la forme : $\mathbf{Q}'(t) = f(t, \mathbf{Q}(t))$ avec $f(t, \mathbf{Q}(t)) = \begin{pmatrix} Q_2 \\ -\omega_0^2 \sin Q_1 \end{pmatrix}$

Conditions initiales $\mathbf{Q}(0) = \begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$. Dans Scilab, on remplacera θ par α et θ_0 par α_0 . Script possible :

```
g = 9.81           // m/s^2
L = 1             // m
w = sqrt(g/L)     // oméga-zéro
function #=Qprime(t, Q)
    #(1) = Q(2)           // theta point
    #(2) = -w^2*sin(Q(1)) // theta points
endfunction
t = linspace(0,10,1000)
t0 = 0             // temps initial
for i = 0:10
    q0 = i/10      // angle initial variable (11 valeurs entre 0 et 1 rad)
    Q0 = [q0;0]   // CI
    Q = ode(Q0,t0,t,Qprime)
    plot2d(t,Q(1,:),style=i+13)
end
```

Tracé traité avec "options graphes.sci" :



On remarque nettement que la période des oscillations augmente avec l'amplitude. L'isochronisme des oscillations est mis en défaut.